

Annemarie Aarts

Afdeling der Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
a.c.t.aarts@tue.nl

Vivi Andasari

Afdeling der Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
v.andasari@tue.nl

Stef van Eijndhoven

Afdeling der Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
s.j.l.v.eijndhoven@tue.nl

Onderzoek

Vallende polymeerdraden vormen Lissajouspatronen

In fabrieksprocessen vind je overal wiskundige fenomenen. Bijvoorbeeld bij de industriële productie van polymeermatten, die onder andere gebruikt worden om te voorkomen dat rivierdijken afkalven. Een polymeerdraad valt in vloeibare toestand loodrecht op een horizontaal bewegende band. Op de band vormt de polymeerdraad patronen waarvan de vorm afhankelijk is van de snelheid van de band. De patronen die hierbij ontstaan, blijken te kunnen worden beschreven door Lissajousfiguren, in de elektrotechniek al veel langer bekend. De resultaten van dit onderzoek geven houvast bij het inrichten van het productieproces, bijvoorbeeld om de omzet te verhogen bij constante kwaliteit van de geproduceerde matten.

Jules Antoine Lissajous (1822–1880) is voor natuurkunde- en elektrotechniekstudenten de uitvinder van de ‘Lissajous-figuren’, gesloten krommen die zich vormen wanneer twee trillingen langs loodrechte lijnen worden gesuperponeerd. In 1855 ontwierp Lissajous een eenvoudige optische methode om samengestelde trillingen te bestuderen. Hij monteerde een spiegel aan elk van twee trillende objecten en richtte een lichtbundel op een van de spiegels. Deze bundel werd weerkaatst naar de andere spiegel en van deze tweede spiegel op een scherm. Op dit scherm vormde de dubbel weerkaatste bundel een tweedimensionaal patroon. Op deze manier construeerde Lissajous een voorloper van de oscilloscoop. Overigens werden de Lissajousfiguren reeds eerder ontdekt en onderzocht door de Amerikaanse wetenschapper Nathaniel Bowditch (1773-1838) die de patronen reeds in 1815 liet voortbrengen door een samengestelde slinger.

Elke samengestelde trilling wordt wiskundig beschreven door een samenstelling van twee eenvoudige harmonische bewegingen, zoals sinusoidalen

$$\begin{aligned}x_L(t) &= A_x \sin(\omega_x t + \varphi_x), \\y_L(t) &= A_y \sin(\omega_y t + \varphi_y),\end{aligned}\quad (1)$$

Hierbij geeft de onafhankelijke variabele t de tijd aan, de parameters A_x en A_y de amplitudes, ω_x and ω_y de hoekfrequenties, en φ_x and φ_y de fases. De samengestelde trilling wordt voorgesteld door de kromme $(x_L(t), y_L(t)), t \geq 0$ in het (x, y) -vlak. De kromme beschrijft een patroon dat begrensd wordt door de zijden van de rechthoek $-A_x \leq x \leq A_x, -A_y \leq y \leq A_y$ in dat vlak.

De patronen laten alleen een gesloten (periodieke) kromme zien als de verhouding van de frequenties ω_x/ω_y een rationaal getal is. Als ω_x/ω_y irrationaal is, laat een wiskundig bewijs, dat de eigenschappen van de verzameling der reële getallen ten volle uitbuit, zien dat ieder punt van de rechthoek willekeurig dicht ligt bij een punt van de kromme of, anders gezegd, de kromme bezoekt iedere open deelverzameling van de rechthoek oneindig vaak. Toch is de kromme niet ‘vullend’ [2]; ge-

geven $x^* \in [-A_x, A_x]$ dan wordt het lijnsegment $(x^*, y), y \in [-A_y, A_y]$ slechts aftelbaar vaak door de kromme bezocht, terwijl de kardinaliteit van dit lijnsegment niet gelijk is aan de kardinaliteit van de verzameling der natuurlijke getallen.

Keuze van faseverschillen $\varphi_x - \varphi_y$ en frequentieverhoudingen ω_x/ω_y bepalen het type Lissajousfiguur. Bijvoorbeeld, voor $\omega_x = \omega_y$ en $\varphi_x = \varphi_y$ volgt de kromme de diagonaal van de rechthoek

$$y = \frac{A_y}{A_x}x, \quad -A_x \leq x \leq A_x;$$

voor $\omega_x = \omega_y$ en $\varphi_y - \varphi_x = \frac{1}{2}\pi$ de ellips

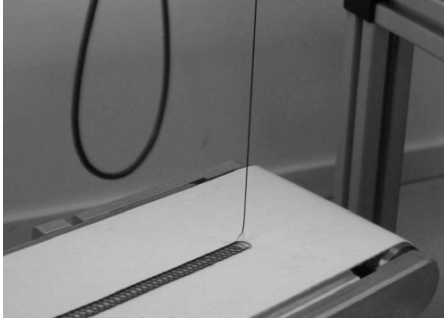
$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = 1;$$

en voor $\omega_y = 2\omega_x$ en $\varphi_y - \varphi_x = \frac{1}{2}\pi$ de parabool

$$\frac{y}{A_y} = 1 - 2\left(\frac{x}{A_x}\right)^2, \quad -A_x \leq x \leq A_x,$$

waarbij we de gelijkheid $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ hebben gebruikt. In al deze gevallen is de periode van de kromme $T = 2\pi/\omega_x$. Een uitgebreid overzicht van de verscheidene Lissajousfiguren wordt in [7] gepresenteerd.

Patronen die erg veel lijken op de Lissajousfiguren kunnen worden verkregen uit een experiment dat qua uitvoering zelfs eenvoud-



Figuur 1 Het experiment, waarbij een gesmolten polymeerdraad valt op een bewegende band

diger is dan het experiment dat Lissajous bedacht had. Benodigheden zijn stroop, een lepel en een dienblad dat met een constante snelheid in een gegeven richting kan worden verschoven. Vul de lepel met stroop en laat de stroop van de lepel glijden op het bewegende dienblad van 10 centimeter hoog. De stroop vormt een ‘vloeiende draad’ die op het bewegende oppervlak van het dienblad een stikpatroon vormt zoals het patroon van de stikdraad op een naaimachine. Er zijn reeds veel studies gemaakt naar dit kronkelend verschijnsel waarbij de vallende stroop beschouwd wordt als een visceuze vloeistofdraad en het bewegende dienblad vervangen is door een band met een goedgecontroleerde snelheid [1, 3–6]. Met behulp van experimenten of simulaties gebaseerd op een wiskundig model probeert men relaties vast te stellen tussen de procesparameters (de valhoogte, de beginsnelheid van de draad en de snelheid van de band), de materiaalparameters (viscositeit en massadichtheid van de vloeistof), en de vorm van het patroon dat op de band wordt gevormd door de visceuze draad. Om dergelijke relaties te vinden is een beschrijving van deze patronen vereist. In concreto, als we met de variabele x de richting beschrijven waarin de band beweegt en met de variabele y de richting loodrecht op bandrichting, dan schrijven we de patronen, die de vallende draad vormt, als een vlakke kromme

$$\begin{aligned} x(t) &= V_{\text{belt}} t + x_C(t), \\ y(t) &= y_C(t), \end{aligned} \quad (2)$$

waarin de variabele t de tijd beschrijft en V_{belt} de snelheid van de band.

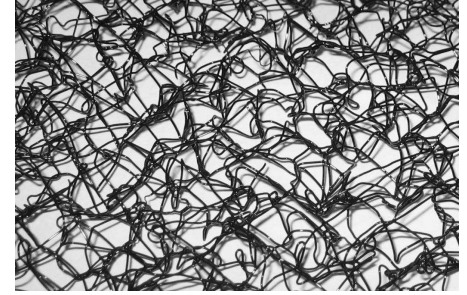
In dit artikel tonen we aan dat de kromme $(x_C(t), y_C(t))$, $t \geq 0$ een Lissajous-kromme is, zodat zowel $x_C(t)$ en $y_C(t)$ eenvoudige sinusoidalen zijn gedefinieerd in vergelijking (1). We laten zien welk effect de keuze van de bandsnelheid en

de valhoogte heeft op de patronen verkregen met deze wiskundige uitdrukking, en dus op de hoekfrequenties ω_x en ω_y , de fases φ_x en φ_y , en de amplitudes A_x en A_y . We stellen de volgende hypothese: de patronen die de visceuze draad op de band vormt, kunnen worden beschreven door Lissajous-figures gebaseerd op eenvoudige sinusoidalen. Als we dit mogen aannemen, dan kan het onderzoek naar het dynamisch gedrag van zo’n vallende polymeerdraad met behulp van zeer complexe wiskundige modellen [4], zich richten op het bepalen van de fundamentele frequenties en bijbehorende amplitudes en fases die bij het gewenste patroon passen. Zodoende wordt de complexiteit van de analyse van het wiskundig model sterk gereduceerd. Als alternatief zouden we middels een statistische proefopzet relaties kunnen bepalen tussen de parameters die de patronen beschrijven, en de parameters die het materiaal en het proces beschrijven.

Het experiment

Voor de validatie van onze hypothese hebben we gebruik gemaakt van experimenten, zoals in figuur 1, om inzicht te krijgen in de verscheidene factoren die een rol spelen in het productieproces van polymeermatten. Zo’n polymeermat (zie figuur 2) bestaat uit vele polymeerdraden die onderling versmolten zijn tot een drie-dimensionale structuur. De polymeerdraden vallen parallel aan elkaar op een bewegend oppervlak; er wordt in het productieproces handig gebruik gemaakt van het kronkelen. Naast experimenten hebben we numerieke simulaties uitgevoerd, gebaseerd op wiskundige modellen, om de relaties te vinden tussen enerzijds proces- en materiaalparameters en anderzijds productieparameters. We doelen hierbij op de diameter van de lussen (amplitude) en het aantal lussen per lengte-eenheid (frequentie) in het patroon dat op de band gevormd wordt, en ook de dikte van de draad. De productieparameters beschrijven de kwaliteit van het product. Zoals in elk productieproces is het doel de omzet te vergroten bij gelijkblijvende kwaliteit. In dit geval zou dit kunnen betekenen dat de aanvangssnelheid van de polymeerdraad en de bandsnelheid worden verhoogd terwijl de valhoogte wordt verkleind. De simulaties zijn er dus op gericht de optimale materiaal- en procesparameters te bepalen.

In de experimentele opstelling wordt gesmolten polymeer door een spingat geperst; het polymeer vormt een draad die vanaf het spingat met zekere beginsnelheid valt op een bewegende band met een constante snelheid



Figuur 2 Een polymeermat, geproduceerd met meerdere polymeerdraden

V_{belt} , zie figuur 1. Er worden stalen met een lengte van 20 cm genomen van de patronen die de draad vormt op de band, zie figuur 3. Voor elk van deze stalen worden de corresponderende amplitudes, frequenties en fases bepaald. De tijd wordt nauwkeurig afgestemd en het resulterende wiskundige model van het patroon

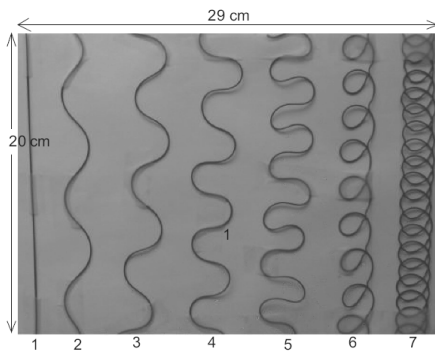
$$\begin{aligned} x(t) &= V_{\text{belt}} t + A_x \sin(\omega_x t + \varphi_x) \\ y(t) &= A_y \sin(\omega_y t + \varphi_y), \end{aligned} \quad (3)$$

wordt op schaal vergeleken met het corresponderende, experimenteel verkregen patroon.

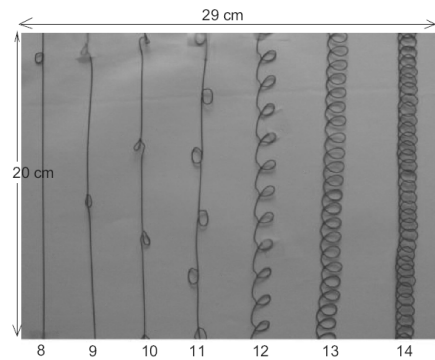
In figuren 3 en 4 staan de stalen die bij de experimenten zijn verkregen. Elke staal, uitgelegd op de bewegende band in een zeker patroon, behoort bij een specifieke snelheid van de band. De valhoogte in figuur 4 is $7/3$ keer groter dan de valhoogte in figuur 3. Het gevolg is dat de draden van figuur 4 de band met een hogere snelheid bereiken dan draden in figuur 3. Staal 1 in figuur 3, verkregen bij hoge bandsnelheid, toont een patroon zonder lussen. Door de snelheid van de band te verlagen ontstaan patronen met incomplete lussen, de meanderpatronen (stalen 2-5); verlagen we de snelheid nog meer dan zien we symmetrische lussen ontstaan die spiraalvormige patronen vormen (stalen 6 and 7). Voor een grotere valhoogte observeren we hetzelfde fenomeen maar met een andere tendens, zie figuur 4: voor relatief hoge bandsnelheden vertonen de patronen asymmetrische lussen die achtvormige patronen beschrijven (stalen 8-11) en voor lagere bandsnelheden de gebruikelijke spiraalvormige patronen (stalen 12-14).

Wiskundige beschrijving

Om de verkregen patronen wiskundig te beschrijven gebruiken we vergelijking (3). Daarbij nemen we voor de bandsnelheid de echte snelheid zoals deze in het experiment is gebruikt. We bepalen de amplitudes A_x en



Figuur 3 Boven: Polymeerstalen bij een relatief kleine valhoogte en variërende bandsnelheid V_{belt} (in): (1) 7.3, (2) 6.3, (3) 5.3, (4) 4.3, (5) 3.3, (6) 2.3, (7) 1.3



Figuur 4 Polymeerstalen bij een relatief grote valhoogte en variërende bandsnelheid V_{belt} (in): (8) 14.6, (9) 12.6, (10) 10.6, (11) 8.6, (12) 5.6, (13) 3.6, en (14) 2.3

A_y , de frequenties $f_x = \omega_x/(2\pi)$ en $f_y = \omega_y/(2\pi)$, en de fases φ_x en φ_y , overeenkomstig de volgende vuistregel:

- We zetten de fase φ_y op 0.
- De amplitude A_y is de helft van de breedte van de staal.
- Voor de bepaling van de frequenties onderscheiden we een meanderpatroon, een spiraalvormig patroon en een achtvormig-patroon.

Voor een meanderpatroon tellen we het aantal keren N_y dat het patroon de denkbeeldige lijn $y = 0$ doorsnijdt voor gegeven staallengte L . De tijd t_L die nodig is om de staal ter lengte L te vormen is gelijk aan $t_L = L/V_{belt}$, zodat de frequentie f_y van het meanderpatroon bepaald kan worden uit $f_y = \frac{1}{2}N_y/t_L = N_y V_{belt}/(2L)$. Om een meanderpatroon te krijgen moet bovendien de verhouding $f_x:f_y$ gelijk zijn aan 2:1, want in dat geval wordt de golfbeweging, voortgebracht door de beweging in de y -richting, niet veranderd. De golven zijn zo breed mogelijk en symmetrisch als de beweging in de x -richting precies in antifase is met de beweging in de y -richting, dit betekent dat $\varphi_x = \pi$. De amplitude A_x wordt door een trial-and-error afstemming bepaald.

staal	V_{belt} [m/min]	A_y [cm]	f_y [Hz]	A_x [cm]	f_x [Hz]	φ_x [°]
2	6.3	0.9	1.5	0.1	3.0	180
3	5.3	1.2	1.6	0.1	3.2	180
4	4.3	1.5	1.6	0.15	3.2	180
5	3.3	1.6	1.65	0.2	3.3	160

Tabel 1 Amplitudes, frequenties and fases voor de meanderpatronen (staal 2, 3, 4 en 5) van figuur 3. De frequentieverhouding is $f_x = 2f_y$.

staal	V_{belt} [m/min]	A_y [cm]	f_y [Hz]	A_x [cm]	f_x [Hz]	φ_x [°]
6	2.3	1.1	1.7	1.3	1.7	115
7	1.3	1.2	1.7	1.4	1.7	90
12	5.6	0.7	5.4	1.0	5.4	-120
13	3.6	0.8	6.4	0.6	6.4	-100
14	2.6	0.7	6.8	0.6	6.8	-90

Tabel 2 Amplitudes, frequenties and fases voor de spiraalvormige patronen (stalen 6, 7, 12, 13 and 14) van figuren 3 en 4. De frequentieverhouding $f_x : f_y$ is 1 : 1.

staal	V_{belt} [m/min]	A_y [cm]	f_y [Hz]	A_x [cm]	f_x [Hz]	φ_x [°]
8	14.6	0.3	1.6	4.7	1.07	0
9	12.6	0.3	2.9	2.6	1.93	0
10	10.6	0.3	4.0	1.8	2.67	0
11	8.6	0.5	5.4	1.3	3.60	0

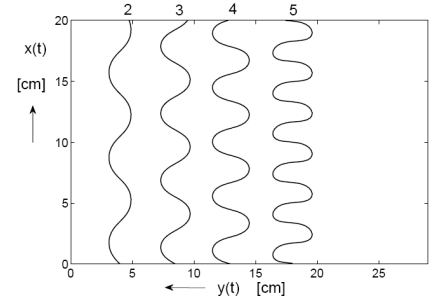
Tabel 3 Amplitudes, frequenties and fases voor de achtvormige patronen (stalen 8, 9, 10 en 11) van figuur 4. De frequentieverhouding is $f_x : f_y$ is 2 : 3.

Voor spiraalvormige en achtvormige patronen tellen we eerst het aantal lussen N_{coils} in het patroon voor de gemeten lengte L van de staal. In elke lus verandert de beweging van de x -coördinaat zijn richting tweemaal: startend met een beweging in de richting van de bewegende band, de positieve x -richting, naar een beweging tegengesteld aan de bewegende band, en terug naar een beweging met de bandrichting. Dus, omdat in de periode $T = 1/f_x$ één lus wordt gevormd, voldoet de frequentie f_x voor spiraalvormige en achtvormige patronen aan $f_x = N_{coils}/t_L = N_{coils}V_{belt}/L$. Voor een spiraalvormig patroon passeert de draad de denkbeeldige lijn $y = 0$ tweemaal zodat $f_y = f_x$.

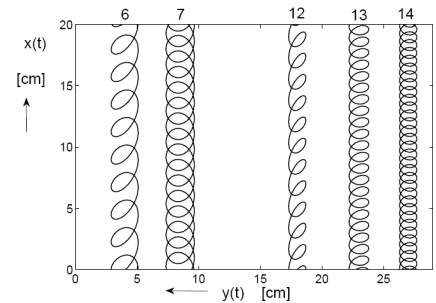
Voor een achtvormig patroon wordt de lijn $y = 0$ driemaal gepasseerd zodat de verhouding $f_x:f_y$ voor deze patronen gelijk is aan 2:3. De scheve stand van de lussen wordt bepaald door de fase φ_x . Om een volledige lus te maken in de periode ter lengte $T = 1/f_x$ zullen er twee tijdstippen zijn waarop de afgeleide dx/dt gelijk aan nul is. Dat betekent dus dat de vergelijking, analoog aan vergelijking (3),

$$V_{belt} + \omega_x A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x) = 0$$

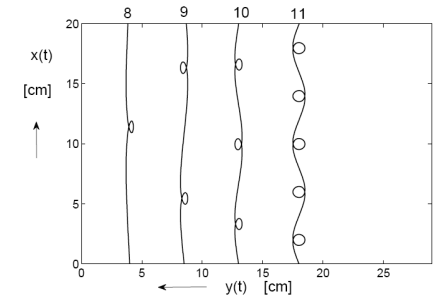
twee nulpunten heeft in het interval $0 \leq t \leq 1/f_x$. Hieruit volgt dat voor spiraalvormige en



Figuur 5 Meanderpatronen verkregen middels toepassing van Vergelijking (3) met de parameter waarden van tabel 1, behorende bij de meanderpatronen van stalen 2, 3, 4 and 5 van figuur 3 die verkregen zijn uit experimenten



Figuur 6 Spiraalvormige patronen verkregen door toepassing van Vergelijking (3) met de parameterwaarden van tabel 2, behorende bij de stalen 6, 7, 12, 13 en 14 van figuren 3 en 4 verkregen uit experimenten

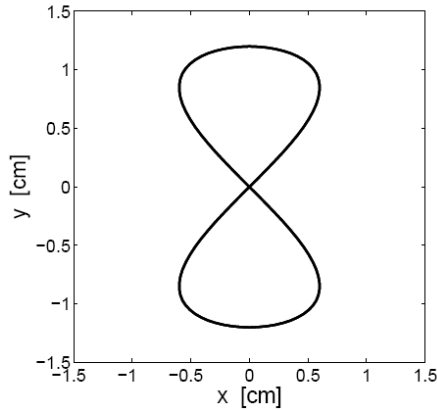


Figuur 7 Achtvormige patronen verkregen door toepassing van Vergelijking (3) met de parameterwaarden uit de tabel 3, behorende bij de stalen 8, 9, 10 en 11 van figuur 4 verkregen uit experimenten

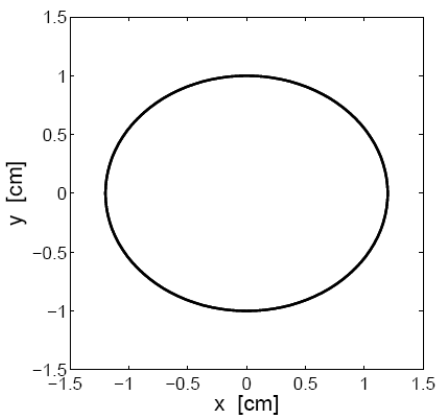
achtvormige patronen, de amplitude A_x moet voldoen aan

$$A_x \geq \frac{V_{belt}}{\omega_x}$$

In tabellen 1, 2, en 3 geven we de aldus gemeten waarden van de vijf parameters (A_x , A_y , f_x , f_y en φ_x) voor de meanderpatronen, spiraalvormige patronen en achtvormige patronen. In de figuren 5, 6, en 7 staan de grafieken van de bijbehorende modelpatronen die als test van onze hypothese vergeleken kunnen worden met de foto's van de overeenkomstige stalen: figuur 3 met stalen 1-5, figuren 3 en 4 met stalen 6, 7, 12-14, en figuur 4 met stalen 8-11.

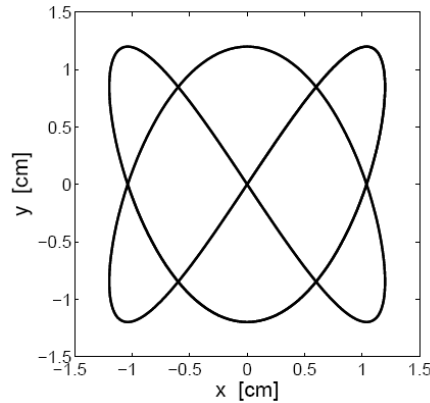


Figuur 8 Lissajousfiguur (0) dat behoort bij de meanderpatronen ($f_x = 2f_y$) van figuur 5. Hierbij is $A_y = 1.2$ cm, $A_x = 0.6$ cm, $\varphi_y = 0$, $\varphi_x = \pi$.

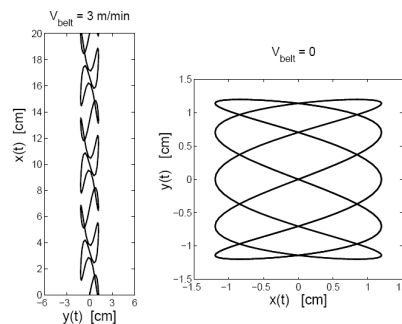


Figuur 9 Lissajousfiguur (0) dat behoort bij de spiraalvormige patronen ($f_x = f_y$) van figuur 6. Hierbij is $A_y = 1.0$ cm, $A_x = 1.2$ cm, $\varphi_y = 0$, $\varphi_x = \pi/2$.

De Lissajousfiguren die we krijgen als we de patronen van figuren 5, 6, en 7 beschrijven



Figuur 10 Lissajousfiguur (0) dat hoort bij de achtvormige patronen ($3f_x = 2f_y$) van figuur 7. Hierbij is $A_y = 1.2$ cm, $A_x = 1.2$ cm, $\varphi_y = \varphi_x = 0$.



Figuur 11 Fantasiepatroon (linker plaatje, $V_{\text{belt}} = 3$) en de bijbehorende Lissajousfiguur (rechter plaatje, 0), voor $f_x/f_y = 5/2$, $f_y = 1.5$ Hz, $A_y = A_x = 1.2$ cm, $\varphi_y = \varphi_x = 0$

in $(x_C(t), y_C(t))$, zijn weergegeven in figuren 8, 9, en 10. Of het patroon in figuur 11 ooit in een experiment zal worden waargeno-

men is de vraag, maar het bewijst dat middels de eenvoudige beschrijving van vergelijking (3) een schat aan kunstzinnige uitingen kunnen worden vorm gegeven.

Conclusie

In dit artikel wilden we aantonen dat met eenvoudige wiskunde relevante aspecten van complexe natuurkundige processen kunnen worden beschreven. De patronen die de vallende polymeerdraad vormen, vertonen wetmatigheid en symmetrie die zich lenen voor een wiskundige beschrijving. In dit geval zijn het de Lissajous-figuren, reeds bekend uit de electrotechniek en al twee eeuwen geleden ontdekt. We hebben onze bewering gevalideerd aan de hand van een analyse van 16 stalen, verkregen vanuit een laboratorium opstelling onder gecontroleerde omstandigheden. Afhankelijk van de snelheid van de band vormt de draad patronen die we in drie groepen hebben opgedeeld: meanderpatronen, spiraalvormige patronen, en achtvormige patronen. We hebben aangegeven hoe de verschillende modelparameters gekozen moeten worden om de patronen met het Lissajous-model te reproduceren. Van bijzonder belang voor diepzinniger modellering is de verhouding van de frequenties in relatie tot het patroon.

Dankwoord

De auteurs bedanken Marc Berkhoff en Frans van Vliet van Colbond B.V., Nederland, voor het uitvoeren van de experimenten en hun bijdrage in discussies.

Referenties

1. S. Chiu-Webster and J. R. Lister. The Fall of a Viscous Thread onto a Moving Surface: a 'Fluid-Mechanical Sewing Machine', *Journal of Fluid Mechanics*, 569:89–111, 2006.
2. J. M. Diaz de la Cruz Cano and J. J. Scala Estalella. Lissajous curves do not fill a rectangular area, *American Journal of Physics*, 64:499–500, 1996.
3. N. M. Ribe. Coiling of Viscous Jets, *Proceedings of the Royal Society of London A*, 460:3223–3239, 2004.
4. N. M. Ribe, M. Habibi, and D. Bonn. Stability of Liquid Rope Coiling, *Physics of Fluids*, 18, 2006.
5. N. M. Ribe, H. E. Huppert, M. A. Hallworth, M. Habibi, and D. Bonn. Multiple Coexisting States of Liquid Rope Coiling, *Journal of Fluid Mechanics*, 555:275–297, 2006.
6. N. M. Ribe, J. R. Lister, and S. Chiu-Webster. Stability of a Dragged Viscous Thread: Onset of "Stitching" in a Fluid-Mechanical "Sewing Machine", *Physics of Fluids*, 18, 2006.
7. M. S. Wu and W. H. Tsai. Corrections for Lissajous figures in books, *American Journal of Physics*, 52:657–658, 1984.